Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

2023/2024. tanév

II. forduló

Megoldások

2024. február 12.

*Minden versenyzőnek a számára (az alábbi táblázatban) kijelölt **négy** feladatot kell megoldania. Azoknak a tanulóknak, akik nem gimnáziumi rendszerben tanulnak fizikát, az **A** feladatsort kell megoldaniuk.*

A rendelkezésre álló idő 180 perc. A feladatok megoldásait önállóan kell elkészítenie, függvénytáblázat és számológép használható. Minden feladatot külön lapon oldjon meg!

A gimnazisták feladatai		*A szakközépiskolások feladatai*	
***9.** osztály*	**2., 6., 7., 9.** (90 pont)	***A.***	**4., 14., 16., 17.** (90 pont)
***10.** osztály*	**1., 5., 13., 14.** (90 pont)		
***11.** osztály*	**8., 11., 15., 18.** (90 pont)		
***12.** osztály*	**3., 10., 12., 19.** (90 pont)		

Azokban a feladatokban, ahol erre az adatra szükség van, vegye a földfelszíni gravitációs gyorsulás értékét **10 m/s^2**-*nek (hacsak a feladat nem ad meg más értéket)!*

Jó munkát kíván

a versenybizottság

❄❄❄

1. Egy szöcske ugrása során legfeljebb R_{max} = 1,8 m távolságra tud elmozdulni vízszintes irányban.
(a) Határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik és az elugráshoz szükséges időt elhanyagoljuk! **(10 pont)**
(b) Mekkora lesz a vízszintes irányú haladás átlagsebessége, ha figyelembe vesszük, hogy a leérkezés és a következő ugrás között átlagosan 0,4 másodperc időköz van? **(5 pont)**

Megoldás:
(a) Egy ugrás kinematikai szempontból ferde hajításnak tekinthető, amely távolsága 45°-os szög alatt maximális (*3 pont*, akármilyen módon jut el hozzá a tanuló: függvénytáblázatból kinézve, vagy levezetéssel szögfüggvény azonosságát felhasználva) és ekkor az ugrás v_0 kezdősebessége és az R_{max} ugrási távolság között fennáll, hogy:

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$ (*3 pont*, akármilyen módon jut el hozzá: függvénytáblázatból kinézve, vagy levezetéssel), amiből:

$$v_0 = \sqrt{R_{\max} \cdot g} = \sqrt{1{,}8\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 4{,}243\,\mathrm{m/s}$$ *(2 pont)*

A szöcske vízszintes irányú haladási sebességét az ugrási sebesség vízszintes komponense adja meg, tehát:

$$v_x = v_0 \cdot \cos 45° = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

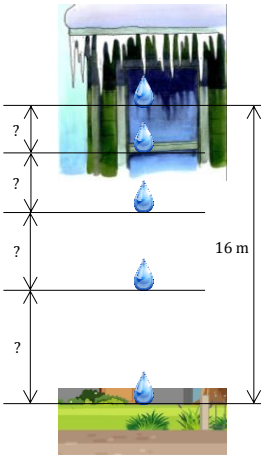
Tehát a szöcske 3 m/s sebességgel halad. *(2 pont)*

(b) Egy ugrás (ferde hajítás) időtartama 0,6 s (*3 pont*, akár a hajítás függőleges komponensén keresztül, akár egyszerűbben a vízszintes komponensen keresztül jut erre az eredményre). Ehhez hozzáadva a 0,4 másodpercet kapjuk, hogy két ugrás közötti időtartam, azaz egy ugrás teljes ideje 1 másodperc *(1 pont)*, egy ugrás vízszintes távolsága 1,8 m, így a vízszintes sebesség:

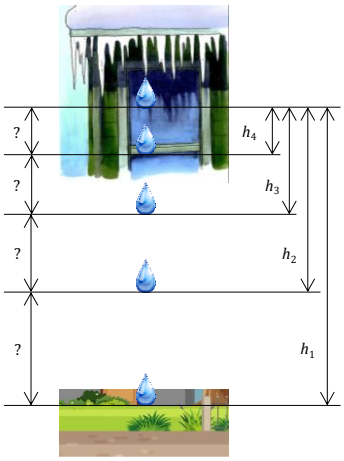
$$v_x = \frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$ *(1 pont)*

❄❄❄

2. Egy ereszcsatornán jégcsap olvadozik a talajszint fölött 16 méter magasan. A jégcsapról egyenletes időközönként vízcseppek hullanak le: mire az első csepp földet ér, addigra a jégcsapról már az ötödik válik le. Milyen távol vannak egymástól e pillanatban a vízcseppek? **(15 pont)**



Megoldás:
Használjuk a következő jelöléseket és adatokat: h_1 = 16 m, h_2, …, h_5 = 0 az 1., a 2., …, az 5. csepp távolsága a jégcsaptól. Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4, Δt_5 = 0, az az idő, mely alatt az 1., a 2., …, az 5. csepp h_1, h_2, …, h_5 mélységbe jutott a jégcsaptól (az esésük ideje).



Az 5. csepp még éppen elválik a jégcsaptól, attól való eltávolodásra 0 ideje volt. A 4. csepp Δt_4 ideje esik. A 3. csepp esési ideje Δt_4 kétszerese, a 2. csepp esési ideje Δt_4 háromszorosa, az 1. csepp esési ideje Δt_4 négyszerese, mert a csepegés időben egyenletes.
Az 1. csepp esési ideje a következőképpen határozható meg:

$$h_1 = \frac{g}{2}\Delta t_1^2 \text{ (1 pont)},$$

amiből

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 16\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}789\text{ s} = 4\Delta t_4 \text{ (2 pont)}.$$

Így a többi esési idő $\Delta t_4 = \frac{1}{4}\Delta t_1$, $\Delta t_3 = \frac{2}{4}\Delta t_1$, $\Delta t_2 = \frac{3}{4}\Delta t_1$ *(2 pont)*.

A többi távolság a jégcsaptól:

$$h_2 = \frac{g}{2}\Delta t_2^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{3}{4}\Delta t_1\right)^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)^2 = \frac{g}{2}\frac{9}{16}\frac{2h_1}{g} = \frac{9}{16}h_1 = \frac{9}{16}16\text{ m} = 9\text{ m} \text{ (2 pont)}$$

$$h_3 = \frac{g}{2}\Delta t_3^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{2}{4}\Delta t_1\right)^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{2}{4}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)^2 = \frac{g}{2}\frac{4}{16}\frac{2h_1}{g} = \frac{4}{16}h_1 = \frac{4}{16}16\text{ m} = 4\text{ m} \text{ (2 pont)}$$

$$h_4 = \frac{g}{2}\Delta t_1^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{4}\Delta t_1\right)^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)^2 = \frac{g}{2}\frac{1}{16}\frac{2h_1}{g} = \frac{1}{16}h_1 = \frac{1}{16}16\text{ m} = 1\text{ m} \text{ (2 pont)}$$

A távolságok alulról fölfelé ezek után: $h_1 - h_2 = 16\text{ m} - 9\text{ m} =$ <u>7 m</u> *(1 pont)*, $h_2 - h_3 = 9\text{ m} - 4\text{ m} =$ <u>5 m</u> *(1 pont)*, $h_3 - h_4 = 4\text{ m} - 1\text{ m} =$ <u>3 m</u> *(1 pont)*, és végül $h_4 - h_5 = 1\text{ m} - 0 =$ <u>1 m</u> *(1 pont)*.

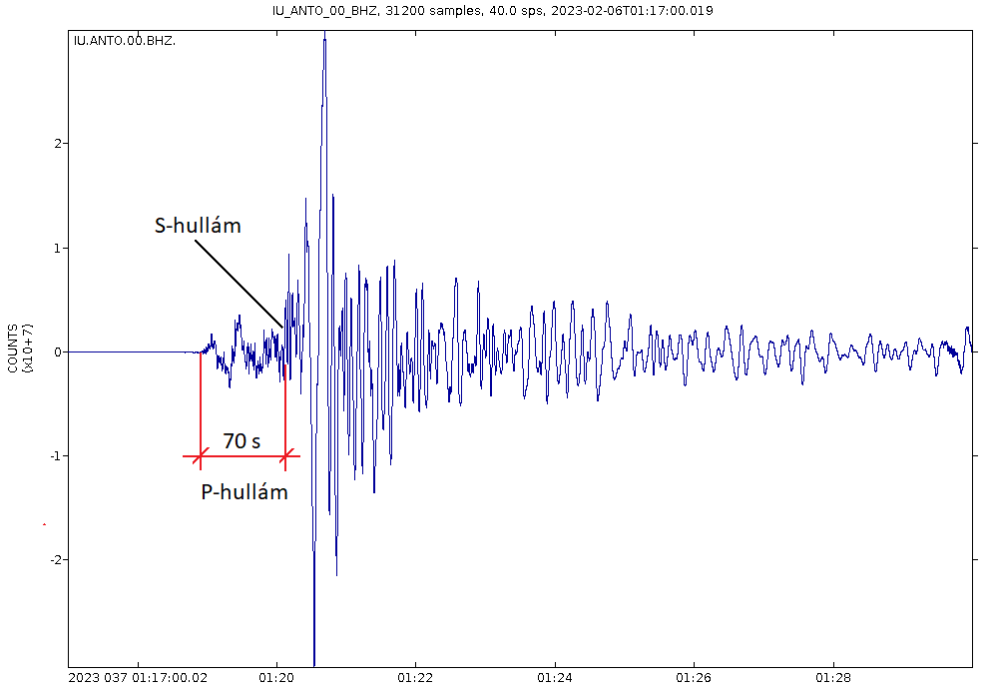
❄❄❄

3. 2023. febr. 6-án két, nagyerejű földrengés rázta meg az Ankarától délkeletre fekvő, 2 millió lakosú Gaziantep várost és környékét.
Az első, M_1 = 7,8-as erősségű rengés hajnalban 3:17-kor, a második, M_2 = 7,5-ös délelőtt 10:24-kor volt.
A rengés következtében a földfelszín a törésvonal mentén több méterrel elmozdult (lásd a mellékelt képet: Hassa település).

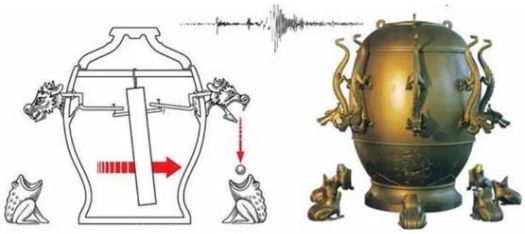
Földrengéskor a földkéregben kétféle mechanikai hullám alakul ki:

- **P-hullám** (longitudinális, primer hullám), terjedési sebessége kb. v_P = 5 km/s.
- **S-hullám** (torziós, szekunder hullám), terjedési sebessége kb. v_S = 3 km/s, amplitúdója sokkal nagyobb, mint a P-hullámé.

A mellékelt szeizmogram az Ankarai Földrengéskutató Központban (DEMAR) készült az első rengésről. Látható, hogy az S-hullám a P-hullámhoz képest kb. 70 s-mal később érte el a Földrengéskutató Központot.



(a) A hullámok terjedési sebessége és az időkésés alapján számítsuk ki, hogy milyen távol volt a rengés központja (epicentruma) Ankarától? (**5 pont**)


Kínai szeizmoszkóp: Csang Heng, Kr.e. 132

A földrengések mérete (M) és a rengéskor fölszabadult energia (E) közötti kapcsolat (Gutenberg–Richter-összefüggés): $\boxed{M = \lg\left(\frac{E}{E_0}\right)^{2/3} - 3,2}$, ahol $E_0 = 1$ J.

A Hirosimára ledobott atombomba 13000 tonna TNT (trinitrotoluol) robbanóanyag energiájával volt egyenértékű. 1 tonna TNT robbanási energiája 4,184 GJ.

(b) Mennyi energia szabadult föl az első rengéskor? Hányszorosa ez az energia a Hirosimára ledobott bomba robbanásakor felszabadult energiának? (**10 pont**)

(c) A második, gyengébb rengés energiája hány százaléka az elsőének? (**5 pont**)

Megoldás:

(a) Legyen a rengés epicentruma és Ankara között a távolság x, a P-hullám terjedési ideje t_P, az S-hullámé $t_S = t_P + \Delta t$. A távolság a két hullám terjedési sebességével és idejével kifejezve *(5 pont)*:

$$x = v_P t_P, \qquad x = v_S\left(t_P + \Delta t\right) = v_S t_P + v_S \Delta t = v_S \frac{x}{v_P} + v_S \Delta t .$$

Innen a keresett távolság:

$$x = \frac{v_P v_S}{v_P - v_S}\Delta t, \qquad x = \frac{5\cdot 3}{5-3}\frac{\text{km}}{\text{s}} 70\,\text{s} = 525\,\text{km} .$$

(b) Az első rengéskor fölszabaduló energia a rengés méretéből *(5 pont)*:

$$M_1 = \lg\left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{2/3} - 3,2, \qquad E_1 = E_0 10^{1,5M_1+4,8}, \qquad E_1 = 1\,\text{J}\cdot 10^{1,5\cdot 7,8+4,8} = 10^{16,5}\,\text{J} \approx 3,16\cdot 10^{16}\,\text{J} .$$

Ez az energia TNT tömegben és hirosimai bombaszámban kifejezve *(3+2 pont)*:

$$E_1 \approx 3{,}16\cdot 10^{16}\,\mathrm{J} = 3{,}16\cdot 10^{7}\,\mathrm{GJ}\,, \qquad m_{\mathrm{TNT}} = 3{,}16\cdot 10^{7}\,\mathrm{GJ}/\left(4{,}184\,\mathrm{GJ/tonna}\right) \approx 7{,}56\cdot 10^{6}\,\mathrm{tonna}\,,$$
$$n_{\text{Hirosima-bomba}} \approx 7{,}56\cdot 10^{6}\,\mathrm{tonna}/13000\,\mathrm{tonna} \approx 581\,\mathrm{darab}\,.$$

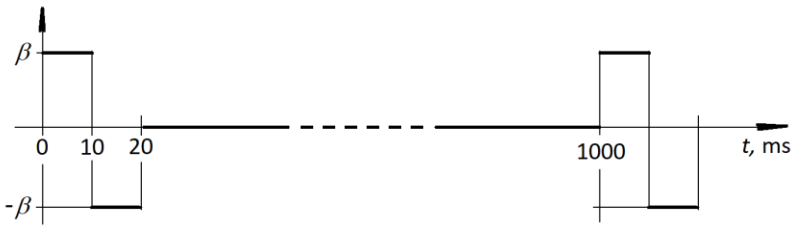
(c) A második rengéskor fölszabaduló energia és ennek aránya az elsőéhez *(5 pont)*:

$$E_2 = E_0 10^{1{,}5M_2+4{,}8}\,, \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{1{,}5M_2+4{,}8}}{10^{1{,}5M_1+4{,}8}} = \frac{10^{1{,}5M_2}}{10^{1{,}5M_1}} = \frac{10^{11{,}25}}{10^{11{,}70}} = 10^{-0{,}45} \approx 35{,}5\%\,.$$

A második rengés energiája kb. harmada volt az elsőének.

❄❄❄

4. A legtöbb analóg kvarcóra másodpercmutatójának mozgása nem egyenletes, a mutató másodpercenként ugrik. (A továbbiakban másodpercmutató helyett csak mutatót írunk.) Az ábrán a mutató 37 s-on áll.



Egy ilyen karóra mutatója a következők szerint mozog. A mutató 10 ms-ig állandó β szöggyorsulással, majd 10 ms-ig $-\beta$ állandó szöglassulással mozog, és ezután 980 ms-ig áll.
A mutató hegye a forgástengelyétől 17 mm-re van. A másik, vastagabb vége 4 mm-rel túlnyúlik a forgástengelyen.

(a) Mekkora a mutató legnagyobb szögsebessége? (**5 pont**)
(b) Mekkora a mutató szöggyorsulása és szöglassulása? (**5 pont**)
(c) Mekkora a mutató hegyének legnagyobb gyorsulása? (**5 pont**)
(d) Mekkora a mutató hegyének legnagyobb és átlagos kerületi sebessége? (**5 pont**)
(e) A képen látható, hogy a másodpercmutató nem a végén van a forgástengelyhez rögzítve, nem úgy, mint a kis- és nagymutató. Mi lehet ennek a magyarázata? (**5 pont**)

<u>Megoldás:</u>
(a) A mutató szögelfordulása 1 s alatt *(2 pont)*

$$\alpha = \frac{360^\circ}{60} = 6^\circ = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{rad}\,.$$

A legnagyobb szögsebességet a szöggyorsulási szakasz végén, t_{gy} = 10 ms alatt éri el. Ekkor a szögelfordulása $\alpha/2$, ebből a maximális szögsebessége *(3 pont)*:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\omega_{\max}}{2} t_{\mathrm{gy}}\,, \qquad \omega_{\max} = \frac{\alpha}{t_{\mathrm{gy}}} = \frac{\frac{\pi}{30}\,\mathrm{rad}}{0{,}01\,\mathrm{s}} = \frac{10\pi}{3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \approx 10{,}472\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,.$$

(b) A mutató szöggyorsulása és szöglassulása *(5 pont)*:

$$\beta_{\mathrm{gy}} = \frac{\omega_{\max}}{t_{\mathrm{gy}}} = \frac{10\pi/3}{0{,}01} = \frac{1000\pi}{3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \approx 1047\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\,, \qquad \beta_{\mathrm{lass}} = -1047\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

(c) A mutató hegyének gyorsulása változik. A maximális gyorsulás a maximális szögsebesség elérése előtti vagy utáni pillanatban következik be. Ekkor a centripetális és az érintő irányú gyorsulás *(5 pont)*:

$$a_{\text{cp}} = R\omega^2 = 0{,}017 \times \left(\frac{10\pi}{3}\right)^2 \approx 1{,}864\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \qquad a_{\text{tg}} = R\beta = 0{,}017 \times \frac{1000\pi}{3} \approx 17{,}802\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ez a két gyorsulás egymásra merőleges, eredőjük a Pitagorasz-tétel alapján 17,900 m/s^2.

(d) A mutató hegyének legnagyobb sebessége *(3 pont)***:**

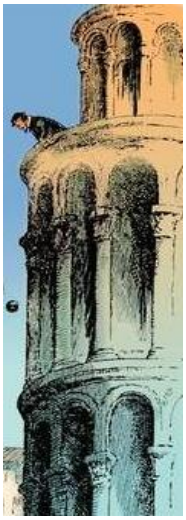
$$v_{\max} = R\omega_{\max} = 0{,}017 \times \frac{10\pi}{3} \approx 0{,}178\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A kerületi sebesség átlaga *(2 pont)*:

$$v_{\text{átl}} = \frac{2R\pi}{t} = \frac{2 \times 0{,}017\pi}{60} \approx 0{,}00178\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}78\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

(e) Ha a másodpercmutató a végén lenne a forgástengelyhez rögzítve, akkor a karóra rázkódásakor (hirtelen gyorsulásakor, lassulásakor) a mutatóra ható tehetetlenségi erő forgatónyomatéka nem lenne zérus, ez visszahatna a mutatót mozgató érzékeny mechanikára. Azzal, hogy a mutató nem a végén van a rögzítve, elérhető, hogy a mutató súlypontján menjen át a forgástengely, és így a rázkódás miatti tehetetlenségi erők nyomatéka zérus legyen. *(5 pont)*
A nagymutató szögsebessége 60-szor, a kismutatóé 720-szor kisebb a másodpercmutatóénál. Rázkódás miatt az ezekre ható forgatónyomaték visszahatása a másodpercmutatót léptető rendszerre elenyésző.

❄❄❄



5. Bergengóc tudománytörténészek érdekes felfedezést tettek: egy kódexben megtalálták a nehézségi gyorsulás legrégebbi megmérésének jegyzőkönyvét. A mérés során a bergengóc szerzetesek különböző függőleges kezdősebességek mellett megmérték egy, a templomtornyuk ablakából szabadon eső test földet éréséhez szükséges időt. Az időt egy korabeli mértékegységben, tiktakban jegyezték föl, a kezdősebességet pedig bergengóc láb/tiktak-ban, ahol a bergengóc láb szintén egy régi mértékegység a hosszúság megadására. A tiktakot röviden tt-vel, a bergengóc lábat pedig bℓ-lel fogjuk jelölni. A jegyzőkönyv szerint a toronyablak párkányáról indítva test földet éréséig 3,2 tt telt el, ha kezdősebessége lefelé 11,25 bℓ/tt volt, illetve a földet érésig 5 tt telt el, ha kezdősebessége fölfelé 11,25 bℓ/tt volt.
Az új történelmi tényen túl ezek az adatok még lehetőséget adtak a tudósoknak arra is, hogy meghatározzák a mára már rég feledésbe merült tiktak és bergengóc láb modern megfelelőit is. Hány másodperccel egyezik meg egy tt, hány cm-rel egyezik meg egy bℓ, továbbá hány bergengóc láb magasságból indultak a testek? (A templomtorony szerencsére ma is áll, ablakpárkánya a talajszint fölött 20 m-re van.) **(25 pont)**

<u>Megoldás:</u>
Mindkét mozgás függőleges hajítás *(1 pont)*. Tekintsük a lefelé mutató elmozdulásokat és sebességeket pozitívnak. Használjuk a következő jelöléseket és adatokat: a mozgás során történt elmozdulás mindkét esetben $H = 20$ m. A kezdősebesség az első kísérletben $v_{01} = 11{,}25$ bℓ/tt, a másodikban $v_{02} = -11{,}25$ bℓ/tt. Az első mozgás ideje $\Delta t_1 = 3{,}2$ tt, a másodiké $\Delta t_2 = 5$ tt.
A függőleges hajítás, mint egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás elmozdulására érvényes a négyzetes úttörvény:

$$H = v_{01}\Delta t_1 + \frac{g}{2}\Delta t_1^2 \text{ (3 pont)} \qquad (1a)$$

$$H = v_{02}\Delta t_2 + \frac{g}{2}\Delta t_2^2 \text{ (3 pont)} \qquad (2a)$$

Behelyettesítve az egyenletekbe az adatokat:

$$20\ \mathrm{m} = 11{,}25\frac{\mathrm{b}\ell}{\mathrm{tt}}\cdot 3{,}2\ \mathrm{tt} + \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(3{,}2\ \mathrm{tt})^2 \text{ (3 pont)} \qquad (1b)$$

$$20\ \mathrm{m} = -11{,}25\frac{\mathrm{b}\ell}{\mathrm{tt}}\cdot 5\ \mathrm{tt} + \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(5\ \mathrm{tt})^2 \text{ (3 pont)} \qquad (2b)$$

Láthatjuk, hogy a két egyenletben ismert számok szerepelnek két ismert mértékegységgel (m, s) kombinálva, és a két kérdéses mértékegység a két ismeretlen. Alakítsuk tovább az egyenleteket:

$$20\ \mathrm{m} = 11{,}25\cdot 3{,}2\ \mathrm{b}\ell + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 10{,}24\ \mathrm{tt}^2 = 36\ \mathrm{b}\ell + 51{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{tt}^2 \qquad (1c)$$

$$20\ \mathrm{m} = -11{,}25\cdot 5\ \mathrm{b}\ell + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 25\ \mathrm{tt}^2 = -56{,}25\ \mathrm{b}\ell + 125\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{tt}^2 \qquad (2c)$$

Szorozzuk meg a (2c) egyenletet $\frac{36}{56{,}25} = 0{,}64$-dal, hogy azután a két egyenlet összegéből eltűnjön a bℓ-t tartalmazó tag:

$$12{,}8\ \mathrm{m} = -36\ \mathrm{b}\ell + 80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{tt}^2 \qquad (2d)$$

$$\Downarrow$$

$$32{,}8\ \mathrm{m} = 131{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{tt}^2 \text{ (3 pont)} \qquad (1c)+(2d)$$

A méterrel egyszerűsíthetünk, majd beszorozva s^2-tel és osztva 131,2-del kapjuk:

$$0{,}25\ \mathrm{s}^2 = \mathrm{tt}^2$$

A gyökvonás során a negatív megoldást, mint hétköznapi jelentés nélkülit kizárva, a tiktak időegységre adódik 1 tt = <u>0,5 s</u>. *(3 pont)*

Visszahelyettesítve a kapott megoldást valamelyik korábbi, pl. a (2d) egyenletbe adódik

$$12{,}8\ \mathrm{m} = -36\ \mathrm{b}\ell + 80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(0{,}5\ \mathrm{s})^2 = -36\ \mathrm{b}\ell + 80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}25\ \mathrm{s}^2 = -36\ \mathrm{b}\ell + 20\ \mathrm{m}$$

Amit rendezve kapjuk

$$36\ \mathrm{b}\ell = 20\ \mathrm{m} - 12{,}8\ \mathrm{m} = 7{,}2\ \mathrm{m}.$$

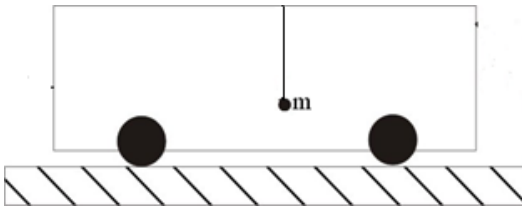
És végül a bergengóc láb modern egységben:

$$1\ \mathrm{b}\ell = 0{,}2\ \mathrm{m} = \underline{20\ \mathrm{cm}} \text{ (3 pont)}.$$

A 20 m-es magasságú ejtés így éppen <u>100 bergengóc láb</u> magasságból indult *(3 pont)*. A nehézségi gyorsulásnak valószínűleg a $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 10\frac{5\ \mathrm{b}\ell}{(2\ \mathrm{tt})^2} = 10\frac{5}{2^2}\frac{\mathrm{b}\ell}{\mathrm{tt}^2} = 12{,}5\frac{\mathrm{b}\ell}{\mathrm{tt}^2}$ mennyiséget kapták.

❄❄❄

6. Egy vízszintes felületen álló kocsi plafonjára rögzített fonál végén egy m = 2 kg tömegű test lóg. A fonal szakítási szilárdsága F_{max} = 30 N. Legfeljebb mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonal még éppen ne szakadjon el? **(25 pont)**



<u>Megoldás:</u>

Az ábrába berajzoltuk a gyorsulásvektort és a ható erőket (súlyerő és kötélerő). *(6 pont)*

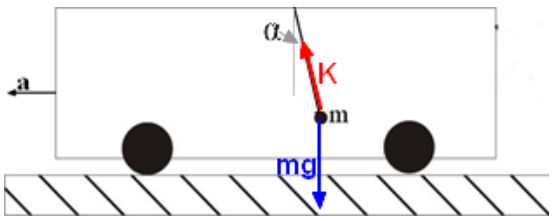
A fonál függőlegessel bezárt szöge α.

A mozgásegyenletek:

vízszintes: $m\cdot a = K\cdot\sin\alpha$, *(4 pont)*

függőleges:

$m\cdot 0 = K\cdot\cos\alpha - mg$, azaz $mg = K\cdot\cos\alpha$. *(4 pont)*



A két egyenletet négyzetre emelve és összeadva:

$$(m\cdot a)^2+(m\cdot g)^2=(K\cdot\sin\alpha)^2+(K\cdot\cos\alpha)^2,$$

$$m^2\left(a^2+g^2\right)=K^2,$$

amiből:

$$a=\sqrt{\frac{K^2}{m^2}-g^2}.$$ *(6 pont)*

A maximális gyorsulás értékét megkapjuk, ha $K = F_{max}$, azaz ha a kötélerő a fonál szakítási szilárdsága:

$$a_{\max}=\sqrt{\frac{F_{\max}^2}{m^2}-g^2}=\sqrt{\frac{30^2}{2^2}-10^2}=11,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$ *(5 pont)*

❄❄❄

7. 1924-ben álltak szolgálatba és az 1980-as évekig üzemeltek a hazai vasúti vontatás büszkeségei, a magyar gyártmányú MÁV 424-es gőzmozdonyok.

A mozdonyok össztömege M = 146 tonna, tapadási tömege M_{tap} = 58 tonna. (A tapadási tömeg a meghajtott kerekekre nehezedő tömeg. A mozdony össztömegének része a vizet és szenet szállító szerkocsi tömege is.) A meghajtott kerekek és a sínek közötti tapadási tényező μ_0 = 0,2.

A mozdonnyal m = 100 tonna tömegű teherkocsikból összeállított szerelvényt vontatnak. A mozdony, illetve a teherkocsik kerekei és a vasúti sínek közötti gördülési ellenállási tényező μ = 0,002. A légellenállást hanyagoljuk el a gördülési ellenállás mellett, g = 10 m/s^2.

(a) Ha vízszintes pályán induláskor a szerelvény gyorsulása a = 0,02 m/s^2, legföljebb hány teherkocsival tud elindulni? (**15 pont**)

(b) A mozdony legnagyobb teljesítménye P = 1000 kW (1360 lóerő). Vízszintes pályán mekkora legnagyobb állandó sebességet érhet el a szerelvény? (**5 pont**)

Megoldás:

(a) A felgyorsított teherkocsik száma legyen n. A mozdony és a teherkocsik gördülési ellenállási erejének és a gyorsításukhoz szükséges erőknek az összege nem lehet nagyobb, mint a mozdony meghajtott kerekei és a sínek közötti tapadási erő. Innen a teherkocsik száma *(15 pont)*:

$$\mu Mg+\mu nmg+Ma+nma\le F_{\text{tap}}=\mu_0 M_{\text{tap}}g,\qquad nm(\mu g+a)\le\mu_0 M_{\text{tap}}g-\mu Mg-Ma,$$

$$n\le\frac{\mu_0 M_{\text{tap}}g-\mu Mg-Ma}{m(\mu g+a)}=\frac{0,2\cdot 58\cdot 10-0,002\cdot 146\cdot 10-146\cdot 0,02}{100\cdot(0,002\cdot 10+0,02)}\approx 27,54.$$

A kocsik száma csak egész lehet, így a szerelvény legföljebb **27 teherkocsival** képes elindulni.

(b) Mivel a légellenállást elhanyagolhatjuk, vízszintes pályán állandó sebességnél a vonóerő egyenlő a gördülési ellenállással *(3 pont)*:

$$F_{\text{vonó}}=\mu(M+nm)g=0,002(146+27\cdot 100)\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\approx 56,92\,\mathrm{kN}.$$

A vontatási teljesítmény a vonóerő és sebesség szorzata, így a legnagyobb sebesség *(2 pont)*:

$$v_{\max} = \frac{P}{F_{\text{vonó}}} = \frac{1000\,\text{kW}}{56{,}92\,\text{kN}} \approx 17{,}6\,\text{m/s} \approx 63{,}2\,\text{km/h}\,.$$

❄❄❄

8. 1924-ben álltak szolgálatba és az 1980-as évekig üzemeltek a hazai vasúti vontatás büszkeségei, a magyar gyártmányú MÁV 424-es gőzmozdonyok.

A mozdonyok össztömege M = 146 tonna, tapadási tömege M_{tap} = 58 tonna. (A tapadási tömeg a meghajtott kerekekre nehezedő tömeg. A mozdony össztömegének része a vizet és szenet szállító szerkocsi tömege is.) A meghajtott kerekek és a sínek közötti tapadási tényező μ_0 = 0,2.
A mozdonnyal m = 100 tonna tömegű teherkocsikból összeállított szerelvényt vontatnak. A mozdony, illetve a teherkocsik kerekei és a vasúti sínek közötti gördülési ellenállási tényező μ = 0,002. A légellenállást hanyagoljuk el a gördülési ellenállás mellett, g = 10 m/s^2.

(a) Ha vízszintes pályán induláskor a szerelvény gyorsulása a = 0,02 m/s^2, legföljebb hány teherkocsival tud elindulni? (**15 pont**)

(b) Miután a vízszintes pályán fölgyorsult a szerelvény, legföljebb milyen meredekségű (hajlásszögű) emelkedőn képes állandó sebességgel haladni? (**10 pont**)

(c) A mozdony legnagyobb teljesítménye P = 1000 kW (1360 lóerő). Vízszintes pályán mekkora legnagyobb állandó sebességet érhet el a szerelvény? (**5 pont**)

<u>Megoldás:</u>
(a) A felgyorsított teherkocsik száma legyen n. A mozdony és a teherkocsik gördülési ellenállási erejének és a gyorsításukhoz szükséges erőknek az összege nem lehet nagyobb, mint a mozdony meghajtott kerekei és a sínek közötti tapadási erő. Innen a teherkocsik száma *(15 pont)*:

$$\mu Mg + \mu nmg + Ma + nma \le F_{\text{tap}} = \mu_0 M_{\text{tap}} g\,, \qquad nm(\mu g + a) \le \mu_0 M_{\text{tap}} g - \mu Mg - Ma\,,$$

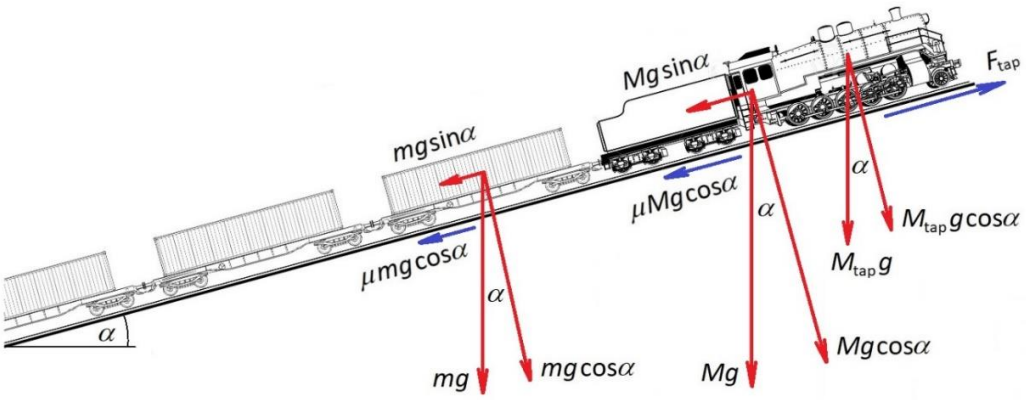
$$n \le \frac{\mu_0 M_{\text{tap}} g - \mu Mg - Ma}{m(\mu g + a)} = \frac{0{,}2\cdot 58\cdot 10 - 0{,}002\cdot 146\cdot 10 - 146\cdot 0{,}02}{100\cdot(0{,}002\cdot 10 + 0{,}02)} \approx 27{,}54\,.$$

A kocsik száma csak egész lehet, így a szerelvény legföljebb **27 teherkocsival** képes elindulni.

(b) A teherkocsik száma n = 27. Legyen az emelkedő hajlásszöge α. Állandó sebességnél a mozdony és a teherkocsik gördülési ellenállási erejének és súlyerejük lejtő irányú összetevőjének összege nem lehet nagyobb, mint a tapadási erő *(10 pont)*:

$$\mu(M + nm)g\cos\alpha + (M + nm)g\sin\alpha \le F_{\text{tap}} = \mu_0 M_{\text{tap}} g\cos\alpha\,,$$

$$(\mu + \tan\alpha)(M + nm) \le \mu_0 M_{\text{tap}}\,.$$



Innen az emelkedő meredeksége *(5 pont)*:

$$\tan\alpha \le \frac{\mu_0 M_{\text{tap}}}{M+nm} - \mu = \frac{0,2\cdot 58}{146+27\cdot 100} - 0,002 \approx 0,00208\,.$$

A szerelvény legföljebb 2,08‰ meredekségű (0,119° hajlásszögű) emelkedőn képes állandó sebességgel haladni.

(c) Mivel a légellenállást elhanyagolhatjuk, vízszintes pályán állandó sebességnél a vonóerő egyenlő a gördülési ellenállással *(3 pont)*:

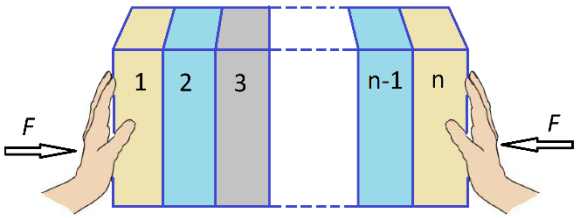
$$F_{\text{vonó}} = \mu(M+nm)g = 0,002(146+27\cdot 100)\cdot 10^3\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2 \approx 56,92\,\text{kN}\,.$$

A vontatási teljesítmény a vonóerő és a sebesség szorzata. Innen a legnagyobb sebesség *(2 pont)*:

$$v_{\max} = \frac{P}{F_{\text{vonó}}} = \frac{1000\,\text{kW}}{56,92\,\text{kN}} \approx 17,6\,\text{m/s} \approx 63,2\,\text{km/h}\,.$$

❄❄❄

9. Kezeink közt összeszorítva üdítőitalos dobozokat rakodunk egyik helyről a másikra. A rakodás gyorsítása érdekében igyekszünk egyszerre minél több dobozt közrefogni az ábra szerint. A dobozokat F = 80 N erővel szorítjuk össze. Az m = 1 kg tömegű dobozok egyformák, merevek, és egymáshoz, illetve tenyerünkhöz képest elcsúszhatnak. A dobozok közötti tapadási tényező μ_d = 0,5; g = 10 m/s^2.



(a) A száraz tenyerünk és az 1-es, illetve n jelű doboz közötti tapadási tényező μ_{t1} = 0,9. Hány dobozt tudunk összeszorítva megtartani? (**20 pont**)

(b) Rakodás közben a tenyerünk vizes lett, és így a tenyerünk és az 1-es, illetve n jelű doboz közötti tapadási tényező μ_{t2} = 0,4-re csökkent. Hány dobozt tudunk vizes tenyerekkel, változatlan szorítóerővel megtartani? (**10 pont**)

Megoldás:

(a) Tegyük föl, hogy n darab doboz van a két tenyerünk között az ábra szerint beszámozva. A két tenyerünk és az 1-es, illetve n jelű doboz közt ébredő tapadási erők eredője a megcsúszás határán *(5 pont)*:

$$F_{t1} = 2F\mu_{t1} = 2\cdot 80\,\text{N}\cdot 0,9 = 144\,\text{N}\,.$$

A tenyerünk és a dobozok közötti tapadási tényező nagyobb, mint a dobozok közötti, mert a dobozokat összenyomó erő minden felületen egyforma. Ha túl sok dobozt akarunk egyszerre fölemelni, nem a tenyerünknél levő 1-es és n jelű doboz csúszik ki a kezünkből, hanem a köztük levők, mert az ezeken a határfelületeken ébredő tapadási erő tartja a legtöbb dobozt. *(5 pont)*

A két szélső doboz között *n*-2 doboz van, ezek akkor nem csúsznak ki, ha eredő súlyuk nem nagyobb a két szélső doboz és a szomszédjuk közt ébredő lehetséges legnagyobb tapadási erőnél. Innen a dobozok száma *(5 pont)*:

$$(n-2)mg \le 2F\mu_{\mathrm{d}}\,, \qquad n \le 2+\frac{2F\mu_{\mathrm{d}}}{mg} = 2+\frac{2\cdot 80\,\mathrm{N}\cdot 0{,}5}{1\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 10\,.$$

Az *n* doboz súlya *(5 pont)*:

$$G = nmg = 10\cdot 1\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 100\,\mathrm{N} < 144\,\mathrm{N}\,.$$

A közrefogott *n* darab doboz súlya kisebb, mint a két tenyerünkön ébredő lehetséges legnagyobb tapadási erő, tehát **10 dobozt** tudunk megtartani.

(b) A vizes a tenyerünk és a dobozok közötti tapadási tényező kisebb, mint a dobozok közötti, ezért most a tenyerünknél csúszhatnak meg a dobozok (és nem egymás között). A két vizes tenyerünk között legyen *n* darab doboz. A két tenyerünk és a dobozok közt ébredő tapadási erők eredője a megcsúszás határán *(5 pont)*:

$$F_{t2} = 2F\mu_{t2} = 2\cdot 80\,\mathrm{N}\cdot 0{,}4 = 64\,\mathrm{N}\,.$$

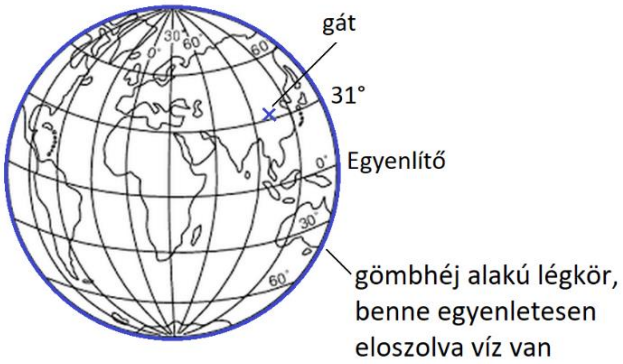
A két tenyerünk közötti *n* darab doboz súlya ennél kisebb kell, hogy legyen. Innen a dobozok számára kapott korlát *(5 pont)*:

$$nmg \le F_{t2}\,, \qquad n \le \frac{F_{t2}}{mg} = \frac{64\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{N}} = 6{,}4\,.$$

Mivel a dobozok száma csak egész lehet, így vizes tenyérrel legföljebb **6 dobozt** tudunk megtartani.

❄❄❄

10. A kínai Három-szurdok-gát a Jangce folyón épített vízerőmű része, az Egyenlítőtől 31°-ra északra fekszik.
A duzzasztás során a gát fölötti víztározóban levő víz mennyisége 39 km^3-rel nő. Ekkora víztömeg áthelyeződése (a Föld egyik részéről a másikra) mérhető értékkel befolyásolhatja a Föld forgásidejét.



Éljünk a következő egyszerűsítő feltételekkel.

- A Földet tekintsük egy R = 6371 km sugarú, M = 5,97x10^{24} kg tömegű tömör, homogén gömbnek, melynek tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_{\text{Föld}} = \frac{2}{5}M\,R^2$.
- A Föld légkörében egyenletesen eloszolva egy R sugarú nagyon vékony gömbhéjban víz van gáz, telített gőz és cseppfolyós állapotban. A tározó felduzzasztása során ennek egy m tömegű része (39 km^3 térfogatú víz) a Jangce vízgyűjtőjén keresztül átkerül a víztározóba. Az m tömegű, R sugarú vékony gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_{\text{gömbhéj}} = \frac{2}{3}m\,R^2$.

- A tárolt víz magassága kb. 180 m, ez elhanyagolható a Föld sugara mellett. A tárolt víz tehetetlenségi nyomatéka a tömegének és a forgástengelytől mért távolsága négyzetének szorzata $\Theta_{\text{tároló}} = m r^2$
- A Földre ható külső erők forgatónyomatékát hanyagoljuk el.
- A Föld forgásideje a duzzasztás előtt T_1 = 86164 s.

(a) Milyen távol van a víztározó a Föld forgástengelyétől? (**5 pont**)

(b) Az egyszerűsítő feltételek alapján becsüljük meg, hogy a Föld saját tengelye körüli forgásideje mennyivel változik a duzzasztás miatt. (**20 pont**)

Megoldás:

(a) A víztározó távolsága a Föld forgástengelyétől *(5 pont)*:

$$r = R\cos\varphi = 6371\,\text{km}\cdot\cos 31° = 5461\,\text{km}\,.$$

(b) Duzzasztás előtt a Föld és a gömbhéj alakú vízréteg eredő tehetetlenségi nyomatéka *(5 pont)*:

$$\Theta_1 = \frac{2}{5}M\,R^2 + \frac{2}{3}m\,R^2\,.$$

A víztározó mérete elhanyagolható a Föld sugara mellett, így a benne levő m tömegű víz tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre:

$$\Theta_{\text{tároló}} = m\left(R\cos\varphi\right)^2\,.$$

A Föld és a víztározóban földduzzasztott víz eredő tehetetlenségi nyomatéka *(5 pont)*:

$$\Theta_2 = \frac{2}{5}M\,R^2 + m\left(R\cos\varphi\right)^2\,.$$

Legyen a duzzasztás előtti forgásidő T_1, a duzzasztás utáni $T_2 = T_1 + \Delta T$.
A Földre ható külső erők forgatónyomatékát elhanyagolhatjuk, így a perdület megmaradási tétel alapján *(5 pont)*:

$$\Theta_1\omega_1 = \Theta_2\omega_2\,,\qquad \Theta_1\frac{2\pi}{T_1} = \Theta_2\frac{2\pi}{T_2}\,,\qquad \frac{\Theta_1}{T_1} = \frac{\Theta_2}{T_1+\Delta T}\,,\qquad \Theta_1\left(T_1+\Delta T\right) = \Theta_2 T_1\,.$$

Behelyettesítve:

$$\left(\frac{2}{5}M\,R^2 + \frac{2}{3}m\,R^2\right)\left(T_1+\Delta T\right) = \left[\frac{2}{5}M\,R^2 + m\left(R\cos\varphi\right)^2\right]T_1\,.$$

Innen a forgásidő változása:

$$\Delta T = T_1 m\frac{\cos^2\varphi - \frac{2}{3}}{\frac{2}{5}M + \frac{2}{3}m}\,,\qquad \Delta T \approx T_1\frac{m\left(\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{5}M}\,.$$

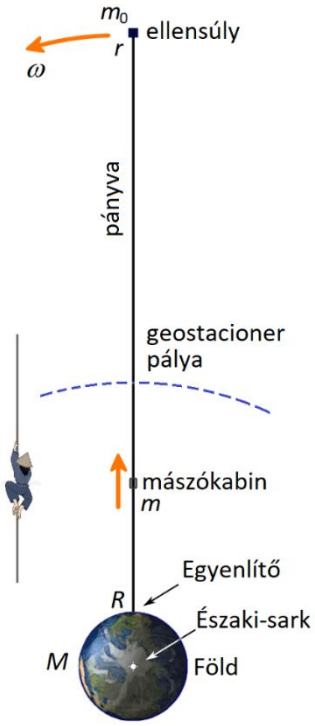
Behelyettesítve *(5 pont)*:

$$\Delta T \approx 86164\,\text{s}\,\frac{39\times10^{12}\,\text{kg}\left(\cos^2 31° - \frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{5}\times5{,}97\times10^{24}\,\text{kg}} \approx 0{,}096\,\mu\text{s} \approx 0{,}1\,\mu\text{s}\,.$$

Megjegyzés: pontosabb modell alapján számolt érték 0,06 μs.

❄❄❄

11. Az űrfelvonót űrjárművek világűrbe juttatását (pályára állítását) segítő eszközként képzelték el (Ciolkovszkij, 1895). Egy ilyen űrfelvonó felépítése a következő lehetne.
A Föld középpontjától r = 100 000 km távolságra az Egyenlítő síkjában egy m_0 = 100 tonna tömegű ellensúly van pányvával a Föld felszínéhez kikötve. A pányva és az ellensúly együtt forog a Földdel, a pányvát az ellensúlyra ható tehetetlenségi erő feszíti ki. A világűrbe juttatandó terhet a pányvába kapaszkodó mászókabinban helyezik el. A pányva tömege elhanyagolható az ellensúly tömegéhez képest. A légköri hatásokat, a Coriolis-erőt és a Földön kívüli égitestek (Nap, Hold stb.) hatását hanyagoljuk el.
A Föld tömege $M = 5{,}974\text{x}10^{24}$ kg, sugara R = 6371 km, és az állócsillagokhoz képest T = 86168 s alatt fordul egyet a saját tengelye körül. A gravitációs állandó $\gamma = 6{,}672\text{x}10^{-11}$ N m^2/kg^2.



(a) Mekkora erő feszíti a pányvát mászókabin nélkül? (**10 pont**)

(b) A Föld felszínétől milyen távol van a mászókabin, amikor a Föld gravitációs vonzóereje megegyezik a forgásból származó tehetetlenségi erővel? (**5 pont**)

(c) Legfőljebb mekkora lehet a Föld felszínéről induló mászókabin össztömege, hogy ne húzza le az ellensúlyt, ha a = 1 m/s^2 gyorsulással indul? g = 10 m/s^2. (**5 pont**)

(d) Miért nem alkalmazzák még napjainkban sem az űrfelfonót? (**5 pont**)

<u>Megoldás:</u>
(a) Az ellensúlyra ható gravitációs vonzóerő *(3 pont)*:

$$F_{\text{gr}} = \gamma \frac{m_0 M}{r^2} = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{10^5 \cdot 5{,}984 \cdot 10^{24}}{\left(10^8\right)^2} \text{N} \approx 3986 \text{ N}.$$

A Föld és a pányvával rögzített ellensúly szögsebessége *(2 pont)*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164 \text{ s}} \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az ellensúlyra ható centrifugális erő *(3 pont)*: $F_{\text{cf}} = m_0 r \omega^2 = 10^5 \cdot 10^8 \cdot \left(7{,}29 \cdot 10^{-5}\right)^2 \approx 53175\text{N}$.

A pányvát feszítő erő *(2 pont)*: $F_{\text{pányva}} = F_{\text{cf}} - F_{\text{gr}} = 53175\text{N} - 3986 \text{ N} = 49189 \text{ N} \approx 49{,}2 \text{ kN}$.

(b) A pányván fölfelé haladva, a mászókabinra ható gravitációs vonzóerő csökken, a forgásból származó tehetetlenségi erő nő. Ha ez a két erő egyenlő, a kabin akkor is egyhelyben marad a Földdel (és a pányvával) együtt forgó vonatkoztatási rendszerben, ha a pányvával való kapcsolatát megszüntetjük. Ez a geostacionárius (geostacioner) pályán tartózkodás ismérve. *(4 pont)*:

$$\gamma \frac{mM}{z^2} = mz\omega^2, \qquad z = \sqrt[3]{\frac{\gamma M}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}672 \times 10^{-11} \times 5{,}984 \times 10^{24}}{\left(7{,}292 \times 10^{-5}\right)^2}} \approx 4{,}2164 \times 10^7 \text{ m} = 42164 \text{ km}.$$

A Föld felszínétől mért magasság *(1 pont)*: $h = z - R = 42164 \text{ km} - 6371 \text{ km} = 35793 \text{ km}$.

(c) Az Egyenlítőn a pányvát feszítő erő a mászókabin súlyából, az induláskor ráható gyorsító erőből, és a Földhöz rögzítés húzóerejéből áll össze. A legnehezebb mászókabin esetében, ami még nem húzza le az ellensúlyt, ha a pányvára ható erők eredője 0 húzóerő mellett lesz zérus:

$$F_{\text{pányva}} = ma + mg\,, \qquad m = \frac{F_{\text{pányva}}}{g+a} = \frac{49189\,\text{N}}{10\,\text{m/s}^2 + 1\,\text{m/s}^2} \approx 4472\,\text{kg}\,.$$

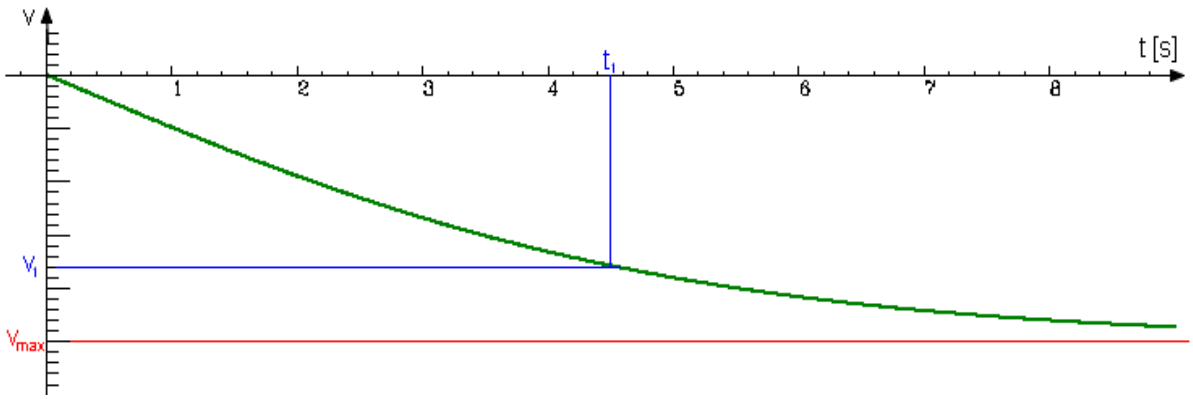
(d) Nem tudtak előállítani olyan nagyon kis sűrűségű és nagyon nagy szakítószilárdságú anyagot, ami alkalmas lenne pányvának. *(5 pont)*

❄❄❄

12. A világ nagy vidámparkjainak egyik legnépszerűbb (és talán legfélelmetesebb) attrakciója az ún. drop-tower (ejtőtorony) konstrukció. Egy jellemzően 80-130 m magas torony mentén zuhan le egy biztonsági üléseket hordozó gondola, az út legnagyobb részében szabadeséssel, így az utasokban az égbe szökik az adrenalin szint. Jelenleg a Zumanjaro drop-tower (New Jersey) a legmagasabb (126 m). A gondolát csörlővel vontatják fel a magasba, majd egyszerűen elejtik.

A mozgásnak három jól elkülöníthető szakasza van. Az első 4-5 másodpercben a gondola szabadon esik, csak a légellenállás lassítja, ezen szakasz végén a sebesség eléri a 120-140 km/h értéket. A földfelszíntől mintegy 30 méter magasságban kezdik fékezni a mozgást igen nagy (az első pillanatokban akár 4-6*g* értékű!) gyorsulással, így kb. 25 méter alatt a sebesség 3-5 m/s értékre csökken. Az utolsó néhány méteren pedig már szelídebb hidraulikus fékezéssel állítják le a mozgást a talajig.

Tekintsük először a mozgás felső szakaszát, tehát a légellenállásos szabadesést. Az esés 126 m magasságból indul, nulla kezdősebességgel. Az alábbi grafikonon a sebesség-idő függvényt ábrázoltuk. Mi a magasságot a felszíntől mérjük, tehát függőleges koordinátatengelyünkön a felfelét tekintjük pozitív iránynak, ezért negatív a sebesség, de a megoldás során természetesen használható a középiskolás szemléletnek jobban megfelelő lefelé mutató tengelyirány.



Az időtengelyt másodpercben skáláztuk, viszont a sebességtengelyen nem adjuk meg a léptéket. A légellenállás miatt a sebesség kellően hosszú idő múlva nem nő tovább, egy v_{max} értékhez tart.

(a) Mekkora a v_{max} sebesség értéke, ha az ellenállási erőt a jól ismert négyzetes légellenállás képlettel számíthatjuk? A gondola össztömege (utasokkal) 800 kg, a levegő sűrűsége $1,2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a gondola (alulnézeti) homlokkeresztmetszete 5,8 m^2, a légellenállási alaktényezője pedig 0,92. **(6 pont)**

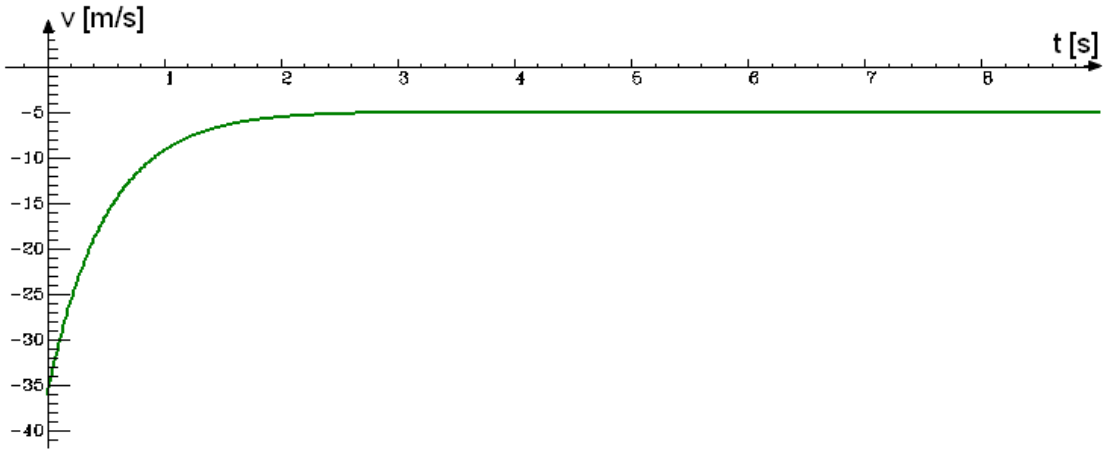
(b) A gondola t_1 = 4,5 másodpercnyi szabadesés után 36 méter magasságban van és a sebessége v_1. Becsülje meg a v_1 sebesség értékét a grafikon alapján! **(2 pont)**

(c) Mekkora volt a szabadesés során a légellenállás munkája a karosszérián? **(6 pont)**

36 méter magasságban kezdődik a második mozgásszakasz, a kemény fékezési tartomány. A fékezés mágneses indukciós elven működik, a fékrendszer nem tartalmaz sem mechanikai, sem elektronikus alkatrészt, nem romolhat el, így tökéletesen biztonságos. A gondola hátsó részéhez egy nagy, igen erős permanens mágneskorong van erősítve, amely a gondola mögött levő függőleges hengeres csőben mozog. (A mágneskorong sugara kb. 8 cm, a cső belső sugara kb. 10 cm tehát a mágnes körül mintegy 2 centiméternyi légrés van.) A szabadesési szakaszon a cső fala nem elektromosan vezető anyagból (jellemzően műanyagból) készült, így nincs sem mágneses, sem indukciós erőhatás. De 36 méter magasságtól lefelé a cső fala már elektromosan vezető, de nem mágnesezhető fémből (jellemzően rézből, vagy alumíniumból) készült, így innentől mágneses indukciós erő hat a korongra és azon keresztül a gondolára.

A mozgó permanens mágneskorongra ható indukciós erő arányos nagyságú és ellentétes irányú a pillanatnyi sebességgel: $\vec{F}_L = -k_L \cdot \vec{v}$

Ezen a mozgásszakaszon tehát a súlyerő mellett egy $\vec{F}_L = -k_L \cdot \vec{v}$ jellegű indukciós fékezőerő hat a gondolára (a légellenállás ezen a szakaszon már elhanyagolható). Az alábbi grafikonon ábrázoltuk az ezen mozgáshoz tartozó sebesség-idő függvényt (az időmérést a fékezés kezdetétől indítjuk).



(d) A grafikon alapján adjon becslést k_L mágneses ellenállási tényező értékére! **(7 pont)**

A mágneses fékezési szakaszon 3 másodpercnyit tart a mozgás. Ennek végén a gondola 5,5 méter magasságban van, a sebessége leolvasható a fenti grafikonról. Innentől megint műanyag váltja fel a fémet a csőfalban, tehát a mágneses fékezés megszűnik és egy hidraulikus fék lép működésbe az utolsó mozgásszakaszon, amelyen egyenletes lassulással leáll a mozgás.

(e) Az elengedés pillanatától kezdve a megállásig mennyi ideig tartott a mozgás? **(4 pont)**

(f) Mekkora volt a karosszéria (és az utasok) gyorsulásának (lassulásának) legnagyobb értéke a teljes mozgás során? **(5 pont)**

Megoldás:

(a) Adataink: m = 800 kg, $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\rho = 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, c_e = 0,92, A_{hk} = 5,8 m^2.

Használjuk a középiskolás szemléletnek jobban megfelelő lefelé mutató tengelyirány. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$m \cdot a = m \cdot g - \frac{1}{2}\rho \cdot c_e \cdot A_{hk} \cdot v^2 \qquad \textit{(3 pont)}$$

A sebesség esés közben növekszik, akkor lesz maximális, ha a gyorsulás nullává válik *(2 pont)*, így:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_e \cdot A_{hk}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 10}{1{,}2 \cdot 0{,}92 \cdot 5{,}8}} = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \textit{(1 pont)}$$

(b) Most már tudjuk, hogy (az ábrán az alsó egyenessel jelölt) maximális sebesség nagysága 50 m/s, így a skáláról könnyen leolvasható a keresett v_1 sebesség értéke:

$$v_1 = 36\,\frac{\text{m}}{\text{s}}. \qquad \textit{(2 pont)}$$

(c) Tehát a nulla kezdősebességgel induló karosszéria t_1 = 4,5 másodpercnyi szabadesés után 36 méter magasságban van, azaz h = 90 m a magasságváltozása és a sebessége v_1 = 36 m/s. Írjuk fel a munkatételt:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - m \cdot g \cdot h = W_{légellenállás}, \qquad \textit{(5 pont)}$$

amiből:

$$W_{légellenállás} = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} 800 \cdot 36^2 - 800 \cdot 10 \cdot 90 = -201{,}6\ \text{kJ}. \qquad \textit{(1 pont)}$$

(d) A grafikonon továbbra is a felfelé irányt vettük pozitívnak, ezért negatív a sebesség, de most megint áttérhetünk a középiskolás szemléletnek jobban megfelelő lefelé mutató tengelyirányra, ekkor a mozgásegyenlet ezen a szakaszon (a légellenállás elhanyagolásával):

$$m \cdot a = m \cdot g - k_L \cdot v. \qquad \textit{(3 pont)}$$

A sebesség nagyságának csökkenésével a gyorsulás nullává válik, azaz hosszú idő alatt a sebesség egy konstans v_{min} értékhez tart *(1 pont)*, amely érték a grafikonról könnyen becsülhető (a grafikonon -5 m/s) 5 m/s nagyságú *(1 pont)*, így k_L mágneses ellenállási tényező értéke:

$$0 = m \cdot g - k_L \cdot v_{\min}$$

$$k_L = \frac{m \cdot g}{v_{\min}} = \frac{800\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}^2}{5\ \text{m/s}} = 1600\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$ *(2 pont)*

(e) Csak az utolsó, hidraulikus fékezési szakaszon nem ismerjük az időtartamot. Ebbe a szakaszba, mint láttuk 5 m/s nagyságú sebességgel érkezik a gondola és 5,5 m magasságban van. Egyenletes fékezéssel a megállásig az átlagsebesség 2,5 m/s, így a szükséges idő:

$$t_3 = \frac{5{,}5\ \text{m}}{2{,}5\ \text{m/s}} = 2{,}2\ \text{s}.$$ *(3 pont)*

Így a teljes menetidő a három szakasz időtartamának összege:

$$t = 4{,}5\ \text{s} + 3\ \text{s} + 2{,}2\ \text{s} = 9{,}7\ \text{s}.$$ *(1 pont)*

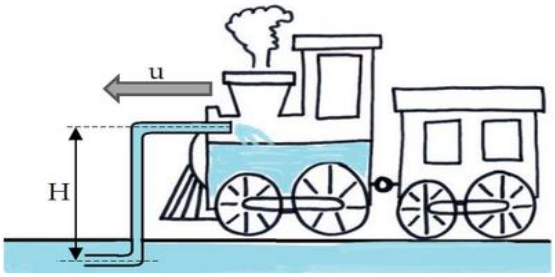
(f) Az első szakaszon a gyorsulás kisebb-egyenlő, mint g, hiszen a súlyerővel szemben egy légellenállási erő fékezi a karosszériát *(2 pont)*. Az utolsó szakaszon a gyorsulás $\frac{5\ \text{m/s}}{2{,}2\ \text{s}} = 2{,}27\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ *(1 pont)*. Az indukciós fékezési szakaszon a belépés pillanatában legnagyobb a fékezőerő, hiszen ekkor legnagyobb a sebesség, mint láttuk v_1=36 m/s, ekkor a gyorsulás (lassulás) értéke:

$$g - \frac{k_L}{m} \cdot v_1 = 10 - \frac{1600}{800} \cdot 36 = -62\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$ *(2 pont)*

Tehát a teljes mozgás során fellépő legnagyobb gyorsulás 6,2g.

❄❄❄

13. A vadnyugaton gőzmozdonyos vonatokkal szállítottak mindent. De a mozdonyoknak időről időre meg kellett állni vizet vételezni, és ekkor sebezhetők voltak, valamint kiesést okozott a menetidejükben. A megoldást egy a mozdony víztartályából kivezetett S alakú cső és egy igen hosszú, a sínpár között futó vízzel töltött vályú jelentette, amiben a csövet végig húzták, ezáltal menet közben tudtak vizet vételezni. Legyen a vályúbeli vízszint és az S-cső kimeneti nyílásának szintkülönbsége H = 2,4 m, a mozdony sebessége u = 55 km/h, a cső átmérője d = 9 cm, a tartály térfogata V = 2,2 m^3. A tartály nyitott, nem lehet benne túlnyomás. (g = 10 m/s^2.)



(a) Milyen hosszú útszakasz alatt telne meg a tartály, ha a súrlódást elhanyagoljuk? **(20 pont)**

(b) A súrlódási veszteség miatt a valóságban a feltöltéshez szükséges útszakasz hossza mintegy 700 m. Mekkora az S-alakú cső súrlódási veszteségaránya? Veszteségaránynak nevezzük a súrlódásmentesen áramló közeg mozgási energiasűrűségének és a súrlódásosan áramló közeg mozgási energiasűrűségének hányadosát. **(10 pont)**

Megoldás:

(a) $H = 2{,}4$ m, $u = 55$ km/h = 15,3 m/s, $d = 9$ cm, $V = 2{,}2$ m^3.

Az S-alakú cső keresztmetszete:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{0{,}09^2 \cdot \pi}{4} = 6{,}36 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 .$$ *(2 pont)*

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a csőben áramló víz vályúban levő (1) felszíni pontja és a tartályban levő (2) kiömlési pontjai között (a mozdonnyal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben):

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 ,$$ *(8 pont)*

ahol p_0 a légköri nyomás, $v_1 = u$ a víz sebessége a vályúban (a mozdonyhoz képest), v_2 a víz sebessége a cső kimeneti nyílásánál (a mozdonyhoz képest), z_1 és z_2 pedig az (1) és (2) pontok magassága egy tetszőlegesen választott alapszinthez képest.

Így kapjuk, hogy:

$$v_2 = \sqrt{u^2 - 2g\left(z_2 - z_1\right)} = \sqrt{u^2 - 2gH} = \sqrt{15{,}3^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2{,}4} = 13{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$ *(2 pont)*

A víz térfogatárama a csőben:

$$q_V = A \cdot v_2 = 6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot 13{,}6 = 8{,}65 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} .$$ *(3 pont)*

A V térfogatú tartály feltöltéséhez szükséges idő:

$$t = \frac{V}{q_V} = \frac{2{,}2}{8{,}65 \cdot 10^{-2}} = 25{,}4\ \mathrm{s}$$ *(3 pont)*

Ennyi idő alatt a mozdony által megtett út:

$$s = u \cdot t = 15{,}3 \cdot 25{,}4 = 388\ \mathrm{m} .$$ *(2 pont)*

Tehát 388 m hosszú útszakasz alatt telne meg a tartály, ha a súrlódást elhanyagoljuk.

(b) A 700 m út megtételéhez szükséges idő:

$$t^* = \frac{700}{15{,}3} = 45{,}8\ \mathrm{s} .$$ *(2 pont)*

Ennyi idő alatt a V térfogatú tartály feltöltéséhez szükséges térfogatáram:

$$q_V^* = \frac{V}{t^*} = \frac{2{,}2}{45{,}8} = 4{,}8 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} ,$$ *(2 pont)*

amiből a csőben való áramlás sebessége:

$$v_2^* = \frac{q_V^*}{A} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-2}}{6{,}36 \cdot 10^{-3}} = 7{,}55\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$ *(3 pont)*

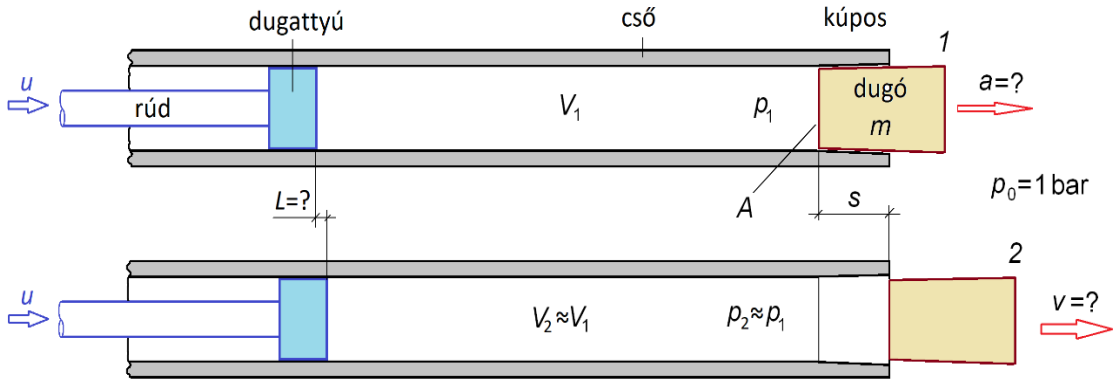
Így a mozgási energiasűrűségek aránya:

$$\frac{\frac{1}{2}\rho v_2^2}{\frac{1}{2}\rho v_2^{*2}} = \left(\frac{v_2}{v_2^*}\right)^2 = \left(\frac{13{,}6}{7{,}55}\right)^2 = 3{,}24$$ *(3 pont)*

Tehát az S-alakú cső súrlódási veszteségaránya 3,24.

❄❄❄

14. A dugós puska sűrített levegővel működő ügyességi játék (lásd az ábrán a vázlatos rajzot).
Egy 30…40 cm hosszú, A = 3 cm^2 keresztmetszetű cső egyik végének belső palástja s = 2 cm hosszon nagyon enyhén kúpos. Ebbe belenyomunk egy szintén kúpos, m = 3 gramm tömegű parafadugót. A dugó megszorul a csőben és légmentesen zár.
A cső másik végén egy rúdhoz erősített dugattyút állandó, u = 1 m/s sebességgel tolunk befelé, ezáltal túlnyomás hozunk létre a csőben. Amikor a csőben a nyomása eléri a p_1 = 2 bar értéket, a dugóra ható nyomóerő egyenlő lesz a dugó és a cső közti tapadási erővel, a dugó hirtelen szabaddá válik, és nagy sebességgel kirepül. A külső légnyomás p_0 = 1 bar.



(a) Mekkora a dugó kezdő gyorsulása? (**5 pont**)

(b) Tegyük föl, hogy miközben a dugó a csőből kifelé halad, a dugó palástja és a csőfal közötti résen távozó levegő tömege elhanyagolható, és a csőben a nyomás jó közelítéssel állandó. Mekkora sebességgel hagyja el a dugó a csövet (mekkora a 2-es állapotban a sebesség), és mennyi idő alatt éri el ezt a sebességet? A légellenállást és az egyéb veszteségeket hanyagoljuk el. (**5+5 pont**)

(c) Mennyivel mozdul el a dugattyú, miközben a dugó kifelé halad a csőből? (**5 pont**)

<u>Megoldás:</u>
(a) Miután a dugó kimozdult a kúpos fészekből (*1*-es helyzet), a ráható túlnyomás gyorsítja. Kihasználva, hogy a belső nyomás jó közelítéssel állandó, mozgásegyenletből a kezdő gyorsulás *(5 pont)*:

$$(p_1 - p_0)A = ma\,, \qquad a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m}, \qquad a = \frac{10^5\,\mathrm{Pa} \times 3 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{0{,}003\,\mathrm{kg}} = 10000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

(b) A feltételek szerint a dugó gyorsulása állandó. A torkolati sebesség és a gyorsulási idő *(5+5 pont)*:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 10000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}}{10000\,\mathrm{m/s}^2}} = 0{,}002\,\mathrm{s}\,.$$

(c) A dugattyú elmozdulása *(5 pont)*:

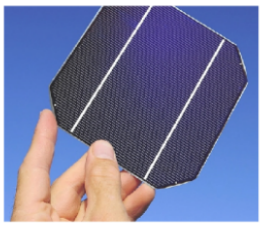
$$L = ut = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}002\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{mm}\,.$$

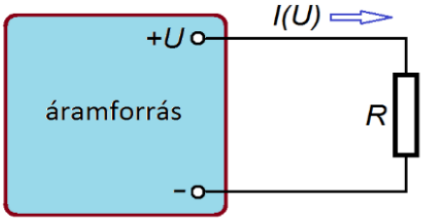
❄❄❄

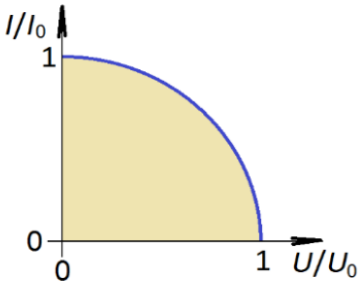
15. Egy áramforráson átfolyó I áramerősség és a kapcsain mért U feszültség közötti összefüggés:

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)^2+\left(\frac{U}{U_0}\right)^2=1, \qquad \text{ahol} \qquad I_0=6\,\text{A}, \qquad U_0=0{,}6\,\text{V}.$$

A szilícium egykristályos napelemek jelleggörbéje hasonlít ehhez.





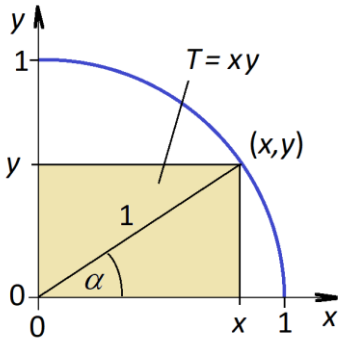


(a) Mekkora R ellenállású fogyasztót kell az áramforrásra kapcsolni ahhoz, hogy a fogyasztó a legnagyobb teljesítményt vegye ki az áramforrásból? (**10 pont**)
A feladat megoldásához először bizonyítsa be, hogy a körbe írt téglalapok közül a négyzet a legnagyobb területű. (Figyelembe veheti a jelleggörbe szimmetrikusságát.)

(b) Mekkora a kivehető legnagyobb teljesítmény? (**5 pont**)

<u>Megoldás:</u>
(a) Jelölés *(3 pont)*:

$$x=\frac{I}{I_0}, \qquad y=\frac{U}{U_0}, \qquad x^2+y^2=1.$$



Ez egy egységsugarú kör egyenlete. Az egységsugarú körbe írható téglalap területe polárkoordináta-rendszerben:

$$x=\cos\alpha, \qquad y=\sin\alpha, \qquad T=x\,y=\cos\alpha\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

A 0…90° tartományban a sin(α) függvénynek 90°-nál van maximuma, a sin(2α) függvénynek 45°-nál. Ekkor a téglalap oldalai azonos hosszúságúak (négyzetet kapunk).
Ha a tanuló a szimmetriára hivatkozva (x és y felcserélhető) látja be, hogy a négyzet a negyedkörbe írható legnagyobb területű téglalap, ezt a megoldást is fogadjuk el.

A körbe írt négyzet területe a relatív feszültség és áramerősség szorzata, és ez a szorzat a relatív teljesítményt adja *(4 pont)*:

$$T=x\,y=\frac{U}{U_0}\cdot\frac{I}{I_0}=\frac{UI}{U_0I_0}=\frac{P}{P_0}.$$

A maximális terület esetén:

$$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad I_{P\max}=I_0\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad U_{P\max}=U_0\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A kivehető teljesítmény a lehető legnagyobb, ha a terhelő ellenállás *(3 pont)*:

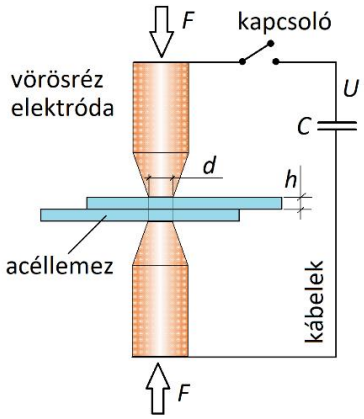
$$R_{P\max}=\frac{U_{P\max}}{I_{P\max}}=\frac{U_0}{I_0}=\frac{0{,}6\,\text{V}}{6\,\text{A}}=0{,}1\,\Omega.$$

(b) A kivehető maximális teljesítmény *(5 pont)*:

$$P_{\max} = I_{P\max} U_{P\max} = \frac{I_0 U_0}{2}, \qquad P_{\max} = \frac{6\,\mathrm{A}\cdot 0{,}6\,\mathrm{V}}{2} = 1{,}8\,\mathrm{W}.$$

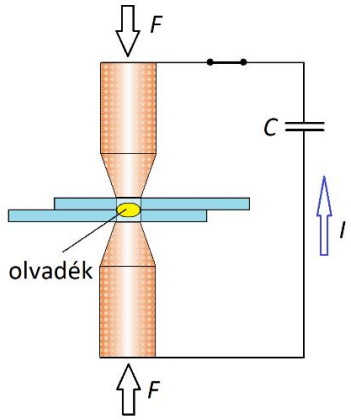
❄❄❄

16. Átlapolt vékony fémlemezeket gyakran rögzítenek egymáshoz ponthegesztéssel. Az egymásra helyezett lemezeket két, csonkakúp végű vörösréz elektródával összeszorítják, majd egy feltöltött kondenzátort kapcsolnak az elektródákra. Az elektródák közötti lemezrészt az átfolyó áram felmelegíti és az érintkezési felületükön részben megolvasztja, így jön létre a kötés.



Az elektródák hegyének átmérője d = 2 mm (a rajz nem méretarányos). Az acéllemezek mérete és hőtani jellemzői:

- vastagság h = 0,5 mm
- sűrűség ρ = 7850 kg/m^3
- hőmérséklet hegesztés előtt T_0 = 25°C.
- fajhő c = 0,49 kJ/(kg K)
- olvadáspont T_{olv} = 1425°C
- olvadáshő L_{olv} = 247 kJ/kg.



(a) A kondenzátor kisülése gyors, így csak az elektródák közötti henger alakú lemezrészek melegednek föl. A hegesztés akkor megfelelő, ha ezek térfogatának k = 75%-a megolvad. Mennyi hő szükséges a kívánt méretű olvadék létrehozásához? (**10 pont**)

A két vörösréz elektróda közötti ellenállás egyenlő az elektródacsúcsok közötti hengeres lemezrészek ellenállásával (az elektródák és a lemezek közötti érintkezések ellenállását hanyagoljuk el). Az acéllemez fajlagos ellenállása T_0 = 25°C-on $r = 1{,}5\cdot 10^{-7}$°Ωm.

(b) Mekkora az elektródák közötti hengeres lemezrészek ellenállása? (**5 pont**)

A vörösréz elektródák, a kapcsoló és az áramvezető kábelek ellenállása $R_{\mathrm{kábel}}$ = 0,06 mΩ.

(c) Ha a feltöltött kondenzátor feszültsége U = 5,5 V, mekkora kapacitású kondenzátor szükséges az olvadék létrehozásához? (**10 pont**)

(d) A kondenzátor bekapcsolásának pillanatában mekkora az induló áramerősség? (**5 pont**)

<u>Megoldás:</u>

(a) Az elektródák közötti lemeztérfogat egy d átmérőjű, $2h$ magasságú henger térfogata. Ennek tömege *(3 pont)*:

$$V = \frac{d^2\pi}{4}2h = \frac{2^2\pi}{4}2\cdot 0{,}5 \approx 3{,}1416\,\mathrm{mm}^3, \qquad m = \rho V = 7850\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 3{,}1416\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^3 \approx 0{,}02466\,\mathrm{g}.$$

Ennek olvadáspontra történő felmelegítéséhez szükséges hő *(3 pont)*:

$$Q_{\text{mel}} = cm\Delta T = 490\,\frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 0,02466 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot (1425-25)\,\text{°C} \approx 16,92\,\text{J}\,.$$

A megolvadó rész olvadásához szükséges hő *(3 pont)*:

$$Q_{\text{olv}} = kmL_{\text{olv}} = 0,75 \cdot 0,02466 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 247 \cdot 10^{3}\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \approx 4,569\,\text{J}\,.$$

A lemez megolvasztásához szükséges összes hő *(1 pont)*:

$$Q_{\text{lemez}} = Q_{\text{mel}} + Q_{\text{olv}} = 16,92\,\text{J} + 4,569\,\text{J} \approx 21,47\,\text{J}\,.$$

(b) Az elektródák közötti acéllemez vastagsága (az áramvezető ellenállás hossza) $2h$. Keresztmetszete és ellenállása *(5 pont)*:

$$A = \frac{(2\,\text{mm})^2\,\pi}{4} = \frac{2^2\pi}{4} \approx 3,142\,\text{mm}^2\,,$$

$$R_{\text{lemez}} = r\,\frac{2h}{A} = 1,5 \cdot 10^{-7}\,\Omega\text{m} \cdot \frac{2 \cdot 0,5\,\text{mm}}{3,142\,\text{mm}^2} \approx 4,775 \cdot 10^{-5}\,\Omega = 0,04775\,\text{m}\Omega\,.$$

(c) A kondenzátorban tárolt energia egy része fölmelegíti és megolvasztja az acéllemez egy részét, másik része az elektródákat és a kábeleket melegíti. Ezek ellenállásai sorba vannak kapcsolva, ezért az áramkörben mindenütt azonos az áramerősség, így az acéllemezben és a kábelben keletkező hő arányos az ellenállásukkal. Innen a kábelben keletkező hő *(4 pont)*:

$$\frac{Q_{\text{kábel}}}{Q_{\text{lemez}}} = \frac{R_{\text{kábel}}}{R_{\text{lemez}}}\,, \qquad Q_{\text{kábel}} = \frac{R_{\text{kábel}}}{R_{\text{lemez}}}\,Q_{\text{lemez}} = \frac{0,06}{0,04775} \cdot 21,49\,\text{J} \approx 27,00\,\text{J}\,.$$

Az összes hőenergia:

$$Q_{\text{hő}} = Q_{\text{lemez}} + Q_{\text{kábel}} = 21,49\,\text{J} + 27\,\text{J} = 48,49\,\text{J}\,.$$

Ez az energia egyenlő a kondenzátorban tárolt energiával *(3 pont)*:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = Q_{\text{hő}}\,.$$

Innen a kapacitás *(3 pont)*:

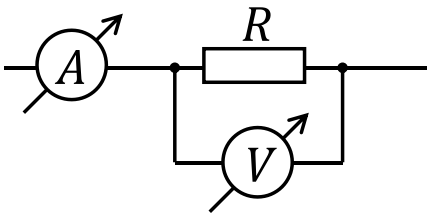
$$C = \frac{2Q_{\text{hő}}}{U^2} = \frac{2 \cdot 48,49\,\text{J}}{(5,5\,\text{V})^2} \approx 3,21\,\text{F}\,.$$

(d) Az induló áramerősséget a feltöltött kondenzátor feszültsége és az áramkör eredő ellenállása (hurokellenállás) határozza meg *(5 pont)*:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{5,5\,\text{V}}{(0,04775 + 0,06)\,\text{m}\Omega} \approx 51,05\,\text{kA}\,.$$

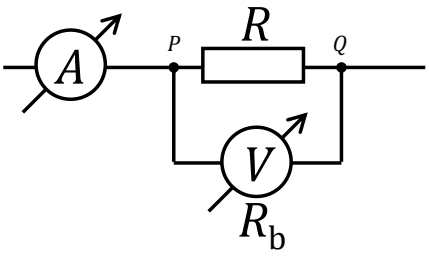
❄❄❄

17. Mekkora az R ellenállás, ha az ábrán látható kapcsolásban az amperméró 5 A áramot, a voltmérő pedig 100 V feszültséget mutat? A voltmérő belső ellenállása 2500 Ω. **(15 pont)**



Megoldás:

Használjuk a következő jelöléseket és adatokat: az amperméró által mutatott áramerősség I = 5 A, ami a kérdéses R ellenállás és a voltmérő párhuzamos kapcsolásán halad át *(2 pont)*.



A voltmérő által mutatott feszültség U = 100 V, ami a P és a Q pontok között, azaz az R ellenálláson is, a voltmérőn is és ezek párhuzamos eredőjén is esik. R_b = 2500 Ω.

Az R ellenállás és a voltmérő párhuzamos kapcsolásának $R_{R||Rb}$ eredő ellenállása megkapható a rajta eső feszültség és a rajta áthaladó áram hányadosaként *(2 pont)*:

$R_{R||Rb} = \frac{U}{I} = \frac{100\ \text{V}}{5\ \text{A}} = 20\ \Omega$ *(4 pont)*.

A párhuzamos kapcsolás eredő ellenállásra a következő törvény igaz:

$$\frac{1}{R_{R||Rb}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_b} \text{ (4 pont)}$$

$$\frac{1}{20\ \Omega} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2500\ \Omega}$$

$$\frac{1}{20\ \Omega} - \frac{1}{2500\ \Omega} = \frac{1}{R}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{20\ \Omega} - \frac{1}{2500\ \Omega}} = \underline{\underline{20{,}16\ \Omega}} \text{ (3 pont)}.$$

❄❄❄

18. Egy elektromos vízforraló két fűtőszállal van ellátva. Amikor az egyiket működteti a hálózati feszültség, akkor a hideg csapvízzel telitöltött vízforraló tartalma 5 perc alatt jön forrásba, amikor pedig a másikat, akkor 8 perc alatt. Hány perc alatt jön forrásba a hideg csapvízzel teli vízforraló tartalma, ha a hálózatra mindkét fűtőszál rá van kapcsolva (a) sorosan, illetve (b) párhuzamosan? A vízforralót mind a négy esetben ugyanakkora feszültség hajtja meg, a fogyasztó eredő ellenállásától függetlenül, a hőveszteségekkel nem kell számolnunk. **(20 pont)**

Megoldás:

Használjuk a következő jelöléseket és adatokat: az első fűtőszál ellenállása R_1, teljesítménye az U hálózati feszültséggel táplálva P_1 és t_1 = 5 perc alatt hozza forrásba a vizet. A második fűtőszálnál ugyanezen jelölések és adatok: R_2, P_2 és t_2 = 8 perc. A soros kapcsolású fűtőszálak esetén: $R_{1\text{-}2} = R_1 + R_2$, $P_{1\text{-}2}$ és $t_{1\text{-}2}$ = ?, a párhuzamos kapcsolású esetben $R_{1||2}$, $P_{1||2}$ és $t_{1||2}$ = ?

Mindegyik forralás ugyanakkora vízmennyiségnek történő ugyanakkora Q hőmennyiség átadásával valósul meg, ezért a szükséges idők fordítottan arányosak a teljesítményekkel *(3 pont)*:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{U^2/R_1}{U^2/R_2} = \frac{U^2}{R_1} \cdot \frac{R_2}{U^2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ (3 pont)}$$

azaz a forraláshoz szükséges idők egyenesen arányosak a fűtőszál ellenállásával *(2 pont)*.

Erre az észrevételre alapozva felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{8\ \text{perc}}{5\ \text{perc}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_2 = \frac{8}{5} R_1 \text{ (2 pont)}$$

Vegyük figyelembe, hogy a két ellenállás soros eredője az ellenállások összegével egyenlő *(2 pont)*:

$$\frac{t_{1-2}}{t_1}=\frac{R_{1-2}}{R_1}\Rightarrow t_{1-2}=\frac{R_{1-2}}{R_1}t_1=\frac{R_1+R_2}{R_1}t_1=\frac{R_1+\frac{8}{5}R_1}{R_1}t_1=\frac{1+\frac{8}{5}}{1}5\text{ perc}=\frac{5+8}{5}\cdot 5\text{ perc}=$$

$$=\underline{\underline{13\text{ perc}}}\ \textit{(3 pont)},$$

valamint figyelembe véve, hogy a két ellenállás párhuzamos eredője az ellenállások szorzatának és összegének hányadosával *(2 pont)*:

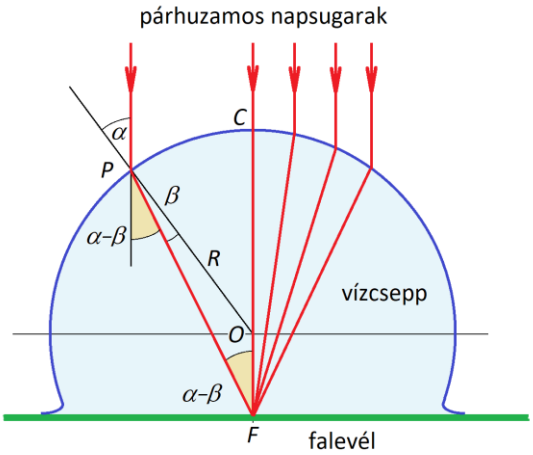
$$\frac{t_{1||2}}{t_1}=\frac{R_{1||2}}{R_1}\Rightarrow t_{1||2}=\frac{R_{1||2}}{R_1}t_1=\frac{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{R_1}t_1=\frac{\frac{R_1\frac{8}{5}R_1}{R_1+\frac{8}{5}R_1}}{R_1}t_1=$$

$$=\frac{\frac{1\cdot\frac{8}{5}\cdot 1}{1+\frac{8}{5}\cdot 1}}{1}5\text{ perc}=\frac{8}{5+8}\cdot 5\text{ perc}=\frac{40}{13}\text{perc}=$$

$$=\underline{\underline{3{,}077\text{ perc}}}\ \textit{(3 pont)}.$$

❄❄❄

19. Egy falevélen harmatcsepp van, amely a föntről ráeső napsugarakat éppen a falevélre fókuszálja. A harmatcsepp fölső fele $2R$ = 3 mm átmérőjű gömb (az ábra szerint).



Mekkora a harmatcsepp fókusztávolsága (a C csúcspont és az F fókuszpont távolsága)? **(15 pont)**

A víz törésmutatója: n = 4/3. Használjuk ki, hogy az optikai tengely közelében haladó fénysugarak beesési és törési szöge kicsi, és kis szögekre: $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\beta\approx\beta$.

<u>Megoldás:</u>

A harmatcsepp lencseként viselkedik. Válasszunk ki egy, az optikai tengellyel párhuzamosan haladó tetszőleges fénysugarat. A bejelölt szögek egyszerűen adódnak (csúcsszögek, váltószögek).

P-ben a fénytörés törvénye *(5 pont)*:

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\approx\frac{\alpha}{\beta},\qquad\text{innen}\qquad\alpha\approx n\beta\,.$$

Kihasználtuk, hogy a kiválasztott fénysugár és az optikai tengely közti távolság kicsi, ezért a beesési és a törési szög is kicsi.

A PFO háromszögre a szinusztétel *(5 pont)*:

$$\frac{\overline{OF}}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin(\alpha-\beta)}, \qquad \overline{OF}=R\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\approx R\frac{\beta}{\alpha-\beta}\approx R\frac{\beta}{n\beta-\beta}=R\frac{1}{n-1}.$$

A keresett fókusztávolság *(5 pont)*:

$$f=\overline{CF}=\overline{CO}+\overline{OF}\approx R+R\frac{1}{n-1}=R\frac{n}{n-1}, \qquad f=R\frac{n}{n-1},$$

$$R=D/2=1{,}5\,\text{mm}, \qquad f\approx 1{,}5\,\text{mm}\frac{4/3}{4/3-1}=2\,\text{mm}.$$

Megoldás a dioptriatörvény alapján

Egy lencse törőereje, ha az n törésmutatójú lencse mindkét oldalát levegő határolja:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

A harmatcsepp egy sík-domború lencse. A domború oldal görbületi sugara $R_1 = R$, a sík görbületi sugara R_2 = végtelen. Az optikai úthossz a lencsében n-szer akkora, mint a levegőben, így a dioptriatörvény:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{nR}+\frac{1}{\infty}\right)=(n-1)\frac{1}{nR}, \qquad f=R\frac{n}{n-1}.$$

Ezt a megoldást is fogadjuk el teljes értékűnek.